A 28-DIMENSIONAL REPRESENTATION IN F_2 OF A SUBGROUP OF THE RUDVALIS GROUP

Mohammad I. Khanfar*

Department of Mathematics,
Yarmouk University, Irbid,
Jordan

الخلاصـــة :

زمرة رودڤاليس هي احدى الزمر " البسيطة " المتفرقة ذوات الرتب العالية . ولهذه الزمرة تمثيل من الدرجة ٢٨ في فضاء مركب . والبحث يناقش هذا التمثيل المركب حيث يعطي وصفاً كاملاً لزمرة جزئية كزمرة مصفوفات أحادية (عنصر واحد غير صفري في كل صف وفي كل عمود) في حقل الاعداد المركبة .

والهدف الأساسي لهذا البحث هو ايجاد التمثيل الصريح لهذه الزمرة الأحادية بمصفوفات من الدرجة ٢٨ في حقل العنصرين ، للحصول على تمثيل أوّلي (ليس له مركبات ذات بعد أدنىٰ) من الدرجة ٨ للزمرة PSL (2, 7) كأحد مركبات التمثيل للزمرة الأحادية في حقل العنصرين .

ABSTRACT

The aim of this paper is to construct explicitly a representation of a monomial subgroup of the (sporadic) Rudvalis simple group in 28-space over F_2, the field of two elements. We then show that an irreducible 8-dimensional representation of the unimodular group PSL (2, 7) over F_2 is obtained as a composition factor of this 28-dimensional representation of the monomial subgroup.

*Address for correspondence :
Department of Mathematics,
Faculty of Sciences,
King Abdulaziz University,
P. O. Box 9028, Jeddah 21413,
Saudi Arabia.

A 28-DIMENSIONAL REPRESENTATION IN F_2 OF A SUBGROUP OF THE RUDVALIS GROUP

1. INTRODUCTION

The (sporadic) Rudvalis simple group R of order $2^{14}.\,3^3.5^3.7.13.29$ is described as a rank 3 permutation group on 4060 points, which is a transitive extension of the Ree Group ${}^2F_4$ (2). In this set of 4060 points, the Ree Group has orbits of lengths 1, 1755, and 2304. The group R has a projective representation in complex 28-space which can be written in $\mathbb{Q}\,[i]$, the Gaussian extension of the rationals. The group was constructed in this projective form by Conway and Wales [1] using computer multiplication of matrices. After reduction of the matrices and the use of a complex quaternion arithmetic, Conway described a set of 4060 vectors and a set of 10 "quaternionic" generators. A brief interpretation of these vectors and generators is given in [2].

In the construction [1], R was shown to be the full automorphism group of a graph associated with the 4060 Conway vectors, and a group $4R$ of order exactly $4|R|$ was obtained as the largest group of unitary automorphisms of this graph. The group $4R$ contains a subgroup in the split extension form K PSL (2, 7), where K is normal in the form and is of order 2^{13}. The subgroup K PSL (2, 7) is represented as a monomial group [3] in the Conway basis over $\mathbb{Z}\,[i]$, the ring of Gaussian integers. We denote the projective image of this monomial group by M, and the set of 4060 projective points by L_R.

2. GENERATORS OF M

The simple group PSL (2, 7) of order $2^3.3.7$ has the following presentation (given in [4]).

$$PSL(2,7) = \langle \kappa\,,\ \mu : \kappa^7 = \mu^2 = (\kappa\,\mu)^3 = (\kappa^4\mu)^4 = 1\,\rangle . \tag{1}$$

Let

$$\alpha = \begin{bmatrix} . & i & . & . \\ i & . & . & . \\ . & . & . & 1 \\ . & . & -1 & . \end{bmatrix},\quad \beta = \begin{bmatrix} . & . & i & . \\ . & . & . & -1 \\ i & . & . & . \\ . & 1 & . & . \end{bmatrix},\quad \gamma = \beta\alpha\ ;$$

$$a = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & -1 & . \\ . & . & . & -1 \end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ . & -1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & -1 \end{bmatrix},\quad c = ab \tag{2}$$

and set

$$h_0 = [iI,\ a,\ b,\ \alpha,\ c,\ \gamma,\ \beta]\ ;$$

$$\alpha = [\alpha, \ldots, \alpha]\ ,\quad \beta = [\beta, \ldots, \beta]$$

as 28-dimensional matrices with 7 blocks of 4×4 matrices along the main diagonal. (No confusion will be caused by this double use of both of the symbols α and β.)

Then in complex 28-space, M is presented as follows:

$$M = \langle h_0,\ \alpha,\ \beta,\ \kappa,\ \mu\rangle$$

where κ and μ are as given in Equation (3) and $\langle\kappa,\ \mu\rangle \cong PSL\ (2,\ 7)$. If $h_r = \kappa^r h_0 \kappa^{-r}$, $(r = 0, 1, \ldots, 6)$, then it can be established that $h_6 = h_0\, h_1\, h_2\, h_3\, h_4\, h_5$.

$$\kappa = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & 1 \\ \hline I & & & & & & \\ \hline & I & & & & & \\ \hline & & I & & & & \\ \hline & & & I & & & \\ \hline & & & & I & & \\ \hline & & & & & I & \\ \hline \end{array}\ ;$$

$$\mu = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline E_1 & & & & & & \\ \hline & & E_2 & & & & \\ \hline & E_3 & & & & & \\ \hline & & & & & & E_4 \\ \hline & & & & E_5 & & \\ \hline & & & & & E_6 & \\ \hline & & & E_7 & & & \\ \hline \end{array} \tag{3}$$

where $I = I_4$, and

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . \end{bmatrix},\quad E_2 = \begin{bmatrix} . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . \\ 1 & . & . & . \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & 1 & . & . \end{bmatrix},\quad E_4 = \begin{bmatrix} . & . & 1 & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 \\ . & 1 & . & . \end{bmatrix},$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \end{bmatrix}, \qquad E_6 = \begin{bmatrix} . & . & . & 1 \\ . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ 1 & . & . & . \end{bmatrix},$$

$$E_7 = \begin{bmatrix} . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . \end{bmatrix} \tag{4}$$

After calculation of the action of κ and μ on α, β we find that the normal closure under κ of the subgroup $H = \langle h_0, h_1, \ldots, h_5, \alpha, \beta \rangle$ is normalized by $\langle \kappa, \mu \rangle$. Thus the monomial group M is a split extension of the form

$$M = H\ PSL\ (2, 7)\ .$$

In fact H is a special 2-group of order 2^{11} ([5], Lemma 7) with center $Z = Z(H) = \langle \{h_r^2\} \rangle$ an elementary abelian group of order 2^3; and quotient $\bar{H} = H/Z$ an elementary abelian group of order 2^8. The cosets of these elements with respect to Z make up the basis:

$$\{h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, \alpha, \beta\}\ .$$

3. A REPRESENTATION OF M

We now describe how M can be represented in 28-space over F_2. The vectors representing L_R generate, as a $\mathbb{Z}\,[i]$-module, the integral lattice

$$L = \mathbb{Z}\,[i]\ L_R$$

which contains the module $4\ \mathbb{Z}\,[i]$. The module L can therefore be specified by describing $L/4\ \mathbb{Z}\,[i]$ as a module over the ring $\mathbb{Z}\,[i]/(4)$. Let $\eta = 1 - i$. Then η divides 2 and (η) is a prime ideal in $\mathbb{Z}\,[i]/(4)$. Reducing modulo (η); that is, passing from the complex module L to the module (elementary abelian group) $\bar{L} = L/\eta L$, the simple group R is represented in the special linear group SL (28, 2).

In this representation of R over F_2, we let $\bar{M}$ denote the image of M; and keep the same notation for the generators h_r, α, β, κ, μ in $\bar{M}$.

Then $\bar{M}$ is of the form

$\bar{M} = A\ B\ PSL\ (3, 2)$, where $|A| = 2^3$, $|B| = 2^8$

and $B\ PSL$ (3, 2) is a split extension. We note here that it is a well-known fact in group theory that the two unimodular groups PSL (2, 7) and PSL (3, 2) are isomorphic.

For an analysis of the invariant submodules of $\bar{M}$ in $\bar{L}$, see reference [2], chapter 7. Using a basis partially adapted to a composition series for $\bar{L}$, the matrix forms (5–10) for the generators have been obtained with the aid of machine computation.

$$\kappa = \left[\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccc}
0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&0&1&1&0\\
1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1\\
0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&1\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&1&0&1\\
1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&1&0&1&0&0&1&1&0\\
0&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&1\\
0&0&1&1&0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1\\
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right] \tag{5}$$

$$\mu = \left[\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1\\
1&1&1&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1\\
1&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&1&1&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0\\
1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&1&0&1&1&1&0&0
\end{array}\right] \tag{6}$$

$$h_0=\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&1&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1\\
1&1&1&1&1&0&1&1&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1
\end{array}\right] \tag{7}$$

$$\alpha=\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc}
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\
1&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&1&0&1&0&1&1\\
1&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0&1&1\\
1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0
\end{array}\right] \tag{9}$$

$$\kappa h_0\kappa^{-1}=\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc}
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&1&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0
\end{array}\right] \tag{8}$$

$$\beta=\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc}
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&1\\
1&1&0&1&1&1&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&1&0&1&1\\
0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\
1&0&1&1&0&0&1&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&1&0&1&0&1&1\\
1&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0\\
0&0&1&0&1&0&1&0&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1
\end{array}\right] \tag{10}$$

4. A REPRESENTATION OF PSL (2, 7) in F_2

The group *PSL* (2, 7) has an irreducible representation of degree 8. This representation was constructed by Khanfar [6] as an 8-dimensional monomial representation over the complex field. In what follows the question as to whether this representation can be written in F_2 is answered.

The 8-dimensional factor appearing in the 28-dimensional matrices affords the representation (11)

$$\kappa = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix},$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \qquad (11)$$

of *PSL* (3, 2). The author has verified that the generator relations given in section 2 are satisfied.

Now, this representation has 6 non-trivial orbits in 8-space over F_2. In terms of the natural basis of this space, Table 1 gives a representative and length of each orbit.

Table 1.

Representative	Length
e_1+e_2	21
$e_1+e_4+e_6$	24
e_1+e_8	28
$e_1+e_3+e_4$	42
$e_1+e_3+e_7$	56
e_1+e_3	84

No union of orbits in the 8-space over F_2 forms a proper invariant subspace under the representation. Hence the above 8-dimensional representation of *PSL* (3, 2) over F_2 is irreducible.

ACKNOWLEDGEMENT

The author is indebted to the referees for their helpful comments and suggestions.

REFERENCES

[1] J. H. Conway and D. B. Wales, "Construction of the Rudvalis Group", *Journal of Algebra,* **27** (1973), p. 538.

[2] K. H. Dar, "On Some Symmetries of 28-Space Associated with the Rudvalis Group", *Ph.D. Thesis, University of Birmingham, England,* (1974).

[3] C. W. Curtis and I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.* New York: Wiley-Interscience, (1962), p. 357.

[4] H. Coxeter and W. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups.* New York: Springer-Verlag, (1972), p. 94.

[5] D. Parrott, "A Characterization of the Rudvalis Simple Group", *Proceedings of London Mathematical Society,* **32** (1976), p. 25.

[6] M. I. Khanfar, "Complex Representation of *PSL* (2, 7)", *Bulletin of Natural Sciences and Engineering of Hacettepe University, Turkey,* **13** (1984), p. 69.

Paper Received 4 July 1985; Revised 12 February 1986.